Concursul de matematică „Ioan Aron”
clasa a VII-a - etapa județeană
18 aprilie 2026
BAREM

Notă: Fiecare subiect se notează cu 7 puncte
Pentru fiecare soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător

Problema 1:

a) Să se rezolve ecuația:

$$\frac{x-2024}{2}+\frac{x-2020}{3}+\frac{x-2014}{4}+\cdots+\frac{x-1916}{11}=55.$$

b) Se consideră suma:

$$S_n=\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{1\cdot 2}}}+\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{2\cdot 3}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n+1+2\sqrt{n(n+1)}}}\ ,n\in\mathbb{N}^*.$$

Să se arate că $1+S_{2024}$ este număr natural.

Soluție:

a) Ecuația se scrie:

$$\left(\frac{x-2024}{2}-1\right)+\left(\frac{x-2020}{3}-2\right)+\left(\frac{x-2014}{4}-3\right)+\cdots+\left(\frac{x-1916}{11}-10\right)= \quad (1p)$$

$$=55-(1+2+3+\cdots+10)\Leftrightarrow(x-2026)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{11}\right)=55-\frac{10\cdot 11}{2} \quad (1p)$$

$$\Leftrightarrow\ (x-2026)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{11}\right)=0\ \ \Leftrightarrow x=2026 \quad (1p)$$

b) $\sqrt{2n+1+2\sqrt{n(n+1)}}=\sqrt{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2}=\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\ ,n\in\mathbb{N}^*$ (1p)

Deci, suma noastră devine:

$$S_n=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

Prin raționalizarea fiecărui numitor, se obține că $S_n=\sqrt{n+1}-1$, de unde (2p)

$1+S_n=\sqrt{n+1}.$

De aici, $1+S_{2024}=\sqrt{2024+1}=\sqrt{2025}=45\ \in\mathbb{N}.$ (1p)

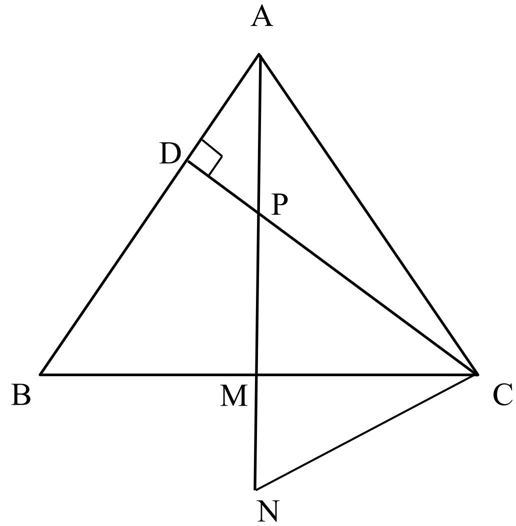
Total Problema 1 7p

Problema 2:

Fie triunghiul ascuțitunghic ABC, M mijlocul laturii $[BC]$, $CD \perp AB$, $D \in AB$, $AM \cap CD = \{P\}$ și $N \in AM$ astfel încât $M \in (AN)$. Dacă $AM = CD$ și triunghiul PNC este echilateral, arătați că $PD = MN$.

Ion Neață

Soluție:



Notăm $AP = 2x$ și $PM = 2y$ (1p)

Cum $m(\measuredangle NPC) = m(\measuredangle APD) = 60°$ avem $m(\measuredangle PAD) = 30°$, deci $PD = \frac{AP}{2} = x$ (2p)

$PN = PC = CD - PD = AM - PD = (2x + 2y) - x = x + 2y$ (2p)

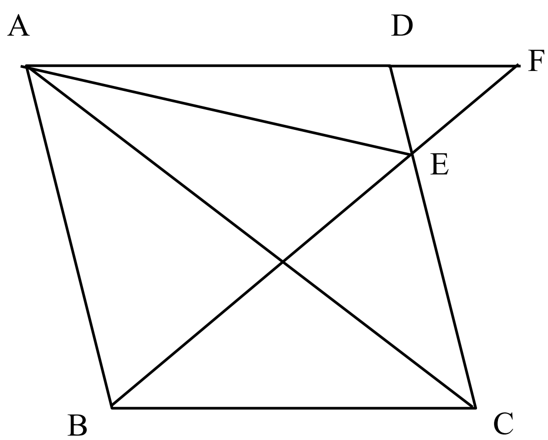
$MN = PN - PM = (x + 2y) - 2y = x = PD.$ (2p)

Problema 3:

Fie paralelogramul $ABCD$. Prelungim AD cu DF. Fie E punctul de intersecție a dreptelor FB și DC. Știind că $AD^2 = AC \cdot DF$, arătați că $(AE$ este bisectoarea $\measuredangle CAF$.

GM. Nr. 2/2025. E: 17130; Victor Felecan, Focșani

Soluție:



$DF \parallel BC \xRightarrow{T.F.A.} \Delta DEF \sim \Delta CEB \Rightarrow \frac{DE}{CE} = \frac{DF}{CB}$. (2p)

Din $AD^2 = AC \cdot DF$ şi $BC = AD$ avem $\frac{DF}{BC} = \frac{DF}{AD} = \frac{AD}{AC}$. Atunci $\frac{DE}{EC} = \frac{DF}{BC} = \frac{AD}{AC} \xRightarrow{R.T.bis.}$ (5p)

$(AE$ este bisectoarea $\measuredangle CAF$.

Problema 4:

Fie x, y și z numere raționale diferite de zero care verifică relația:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = xyz$$

Arătați că numărul $A = \sqrt{(x^2y^2+1)(y^2z^2+1)(z^2x^2+1)}$ este rațional.

Soluție:

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = xyz \Leftrightarrow x^2y^2z^2 = xy + yz + zx$ (2p)

$x^2y^2 + 1 = \frac{x^2y^2z^2+z^2}{z^2} \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{xy+yz+zx+z^2}{z^2} = \frac{y(x+z)+z(x+z)}{z^2} = \frac{(z+x)(z+y)}{z^2}$ (2p)

Analog,

$y^2z^2 + 1 = \frac{(x+y)(x+z)}{x^2}$; $z^2x^2 + 1 = \frac{(y+z)(y+x)}{y^2}$ (1p)

Așadar,

$A = \sqrt{(x^2y^2+1)(y^2z^2+1)(z^2x^2+1)} = \sqrt{\frac{(z+x)(z+y)}{z^2} \cdot \frac{(x+y)(x+z)}{x^2} \cdot \frac{(y+z)(y+x)}{y^2}} =$

$= \sqrt{\frac{(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2}{(xyz)^2}} = \left|\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}\right|$ care este număr rațional. (2p)