INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN ARAD
Strada Corneliu Coposu nr.26, Telefon: 0257-280008,Fax 0257-214746,
web : www.isjarad.ro e-mail: inf_arad@isjarad.ro
MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Concursul interjudețean de matematică „Ioan Aron”

clasa a VIII-a - etapa județeană

18 aprilie 2026

BAREM

Notă: Fiecare subiect se notează cu 7 puncte
Pentru fiecare soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător

1. a. Rezolvați ecuația: $x\sqrt{\left(3-2\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt{52-30\sqrt{3}}=2x\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}, x\in\mathfrak{R}.$

b. Calculați media aritmetică și geometrică a numerelor a= $\left(\sqrt{2026}-\sqrt{2025}\right)^2$ și b= $\left(\sqrt{2026}+\sqrt{2025}\right)^2$.

Adriana Crucean, Arad

Soluție

a. $x\cdot\left|3-2\sqrt{3}\right|-\left(3\sqrt{3}-5\right)=2x\left|1-\sqrt{3}\right|$

$x\cdot\left(2\sqrt{3}-3\right)-3\sqrt{3}+5=2x\sqrt{3}-2x$ (1p)

$2\sqrt{3}x-3x+2x-2x\sqrt{3}=3\sqrt{3}-5$

$x\cdot(-1)=3\sqrt{3}-5$ (1p)

$x=5-3\sqrt{3}$ (1p)

b. $a=2026-2\cdot\sqrt{2026}\cdot\sqrt{2025}+2025=4051-2\cdot\sqrt{2026}\cdot\sqrt{2025}$ (1p)

$b=2026+2\cdot\sqrt{2026}\cdot\sqrt{2025}+2025=4051+2\cdot\sqrt{2026}\cdot\sqrt{2025}$ (1p)

$m_a=\frac{a+b}{2}=\frac{2\cdot 4051}{2}=4051$ (1p)

$m_g=\sqrt{ab}=\sqrt{\left|\sqrt{2026}-\sqrt{2025}\right|\left|\sqrt{2026}+\sqrt{2025}\right|}=\sqrt{2026-2025}=1$ (1p)

2. Calculați suma tuturor numerelor intregi impare din intervalul : $\left(\sqrt{1111},\ \sqrt{14641}\right)$.

Soluție

a) $\sqrt{1111} < \sqrt{1156} = 34$ (0,5p)

$\sqrt{14641} = 121$ (0,5p)

Numerele din interval sunt : 35,37,39,41,... 119. (1p)

Suma lor este : 35+37+...+119 = 3311 (1p)

b) Determinați perechile (x, y) de numere naturale pentru care este adevărată egalitatea

$$2x+2y-y^2=\sqrt{4x^2+4y^2+4x-4y+1}$$

Lucian Dragomir, Oțelu Roșu

Considerăm expresia $E(x,y)=4x^2+4y^2+4x-4y+1=(2y-1)^2+4x^2+4x$

Deoarece $y \in \mathbb{N}$, avem $2y-1 \neq 0$ și astfel $(2y-1)^2 \geq 1$. (0,5p)

Prin urmare $E(x,y) \geq 1+4x+4x^2=(2x+1)^2$ (1) (0,5p)

Membrul stâng se scrie $2x+2y-y^2=2x+1-(y-1)^2 \leq 2x+1$ (2) (0,5p)

Din (1) și (2) deduce că egalitatea din enunț se obține dacă și numai dacă

$$2x+2y-y^2=2x+1=\sqrt{(2y-1)^2+4x^2+4x}$$ (0,5p)

De unde $2y-y^2=1 \Leftrightarrow (y-1)^2=0 \Leftrightarrow y=1$ (0,5p)

$2x+1=\sqrt{1+4x+4x^2}=|2x+1|$ (0,5p)

adevărat pentru orice *x* număr natural. Așadar, perechile de numere naturale cerute sunt:

$(x,y)=(x,1)$

cu x număr natural (1p)

3. Pe planul pătratului ABCD se construiește perpendiculara AM, astfel încât AC=MO, O fiind centrul pătratului și se notează cu E și F mijloacele segmentelor MB și MD. Arătați că (AEF)⊥(CEF).

Soluție:

MA⊥(ABCD) și AD,AB⊂(ABCD) ⇒ MA⊥ AD , MA⊥AB. (1p)

AD=AB, MA latură comună $\overset{CC}{\Rightarrow} \Delta\, MAD \equiv \Delta MAB$ ⇒ MD=MB ⇒ DF=FM=BE=EM. (1p)

$\left.\begin{array}{r} CD = CB \\ DF = BE \\ \widehat{CBE} \equiv \widehat{CDF} \end{array}\right\} \overset{LUL}{\Longrightarrow} \Delta CDF \equiv \Delta CBE \Rightarrow CF \equiv CE \Rightarrow \Delta$ CEF isoscel (1p)

$\left.\begin{array}{r} AD \equiv AB \\ AF \equiv AE \\ \widehat{ADF} \equiv \widehat{ABE} \end{array}\right\} \overset{LUL}{\Longrightarrow} \Delta ADF \equiv \Delta ABE \Rightarrow AE \equiv AF \Rightarrow \Delta$ AEF isoscel . (1p)

Fie MO ∩EF= {G}, G este mijlocul lui EF.

Cum Δ CEF este isoscel iar AG este mediană ⇒ AG este înălțime, AG ⊥EF, AG ⊂(AEF) (1p)

Cum Δ AEF este isoscel iar CG este mediană ⇒ CG este înălțime, CG ⊥EF, CG⊂ (CEF) (1p)

(AEF)∩(CEF) = EF ⇒ $\widehat{\big((AEF),(CEF)\big)} = \widehat{(AG,GC)} = \widehat{AGC}.$

GO=$\frac{MO}{2} = \frac{AC}{2}$, GO este mediana corespunzătoare lui AC ⇒ $\widehat{AGC}$= 90^0 ⇒(AEF)⊥(CEF). (1p)

4. Fie a,b,c numere raționale nenule astfel încât a+b≠0, b+c≠0, c+a≠0 și $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1$. Arătați că valoarea expresiei $\frac{a(2a+7)}{b+c}+\frac{b(2b+7)}{c+a}+\frac{c(2c+7)}{a+b}$ este număr natural prim.

Ion Neață, Slatina, Olt

Soluție

$\frac{a(2a+7)}{b+c}+\frac{b(2b+7)}{c+a}+\frac{c(2c+7)}{a+b}=\frac{2a^2+7a}{b+c}+\frac{2b^2+7b}{c+a}+\frac{2c^2+7c}{a+b}=2\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right)+7\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)=$
$2\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right)+7$. (1p)

$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}+a+b+c=\frac{a^2+ab+ac}{b+c}+\frac{b^2+bc+ba}{c+a}+\frac{c^2+ac+bc}{a+b}=\frac{a(a+b+c)}{b+c}+\frac{b(a+b+c)}{c+a}+\frac{c(a+b+c)}{a+b}=$

$(a+b+c)\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)=a+b+c$ (3p)

$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}+a+b+c=a+b+c$ (1p)

$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=0$ (1p)

$\frac{a(2a+7)}{b+c}+\frac{b(2b+7)}{c+a}+\frac{c(2c+7)}{a+b}$ = 7, care este număr natural prim. (1p)