

Concursul regional de matematică „Ioan Aron”
clasa a VIII-a
etapa regională - 10 mai 2025
Barem de notare

Notă: Se punctează orice altă soluție corectă, chiar dacă nu este precizată în barem

1. Fie numerele pozitive a, b care verifică condițiile : $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 3$ și $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{a} = 5$.

Arătați că $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \sqrt{7}$.

George Florin Șerban, Brăila, RMT nr. 1 / 2025

Soluție:

Notăm $S = a + b$ și $P = a \cdot b$ 1p

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 3 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 3ab \Leftrightarrow$$

$$(a + b)^2 - 2ab = 3ab \Rightarrow (a + b)^2 = 5ab \Rightarrow S^2 = 5P \quad 2p$$

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{a} = 5 \Leftrightarrow a^4 + b^4 = 5ab$$

$$(a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = 5ab \Rightarrow$$

$$9a^2b^2 - 2a^2b^2 = 5ab \Rightarrow 7a^2b^2 = 5ab \Rightarrow 7P^2 = 5P \quad 1p$$

$$P(7P - 5) = 0, \quad P \neq 0 \Rightarrow P = \frac{5}{7} \quad 1p$$

$$S^2 = \frac{25}{7} \Rightarrow P = \frac{5\sqrt{7}}{7}, \quad S > 0 \quad 1p$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = \frac{5\sqrt{7}}{7} \cdot \frac{7}{5} = \sqrt{7} \quad 1p$$

2. Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu vârful în V și punctele M , N și P , mijloacele muchiilor AD , BC , respectiv VA . Arătați că unghiul dreptei CP cu planul (BAD) are măsura de 45° dacă și numai dacă unghiul dreptei CP cu planul (VMN) are măsura de 30° .

Ion Tudor, E16797 G.M.B, nr. 1 /2024

Soluție:

Fie O centrul pătratului $ABCD$ și VO înălțimea piramidei

CP și VO – mediane în care se intersectează într-un punct Q 1p

Proiecția dreptei CP pe (BAD) este dreapta OC ,

deci unghiul dreptei CP cu (BAD) este unghiul $\sphericalangle OCQ$ 1p

$$CN \perp MN, \quad CN \perp VO, \quad MN \cap VO = \{O\} \Rightarrow CN \perp (VMN) \quad 1p$$

Deci, proiecția dreptei CP pe (VMN) este NQ

Unghiul dreptei CP cu (VMN) este $\sphericalangle CQN$ 1p

Dacă $m(\sphericalangle OCQ) = 45^\circ$, atunci $CQ = \sqrt{2} \cdot OC$ și cum $CN = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot OC$,

în $\triangle CQN$ dr, cateta CN este jumătate din ipotenuza CQ , așadar

$$m(\sphericalangle CQN) = 30^\circ. \quad 2p$$

Reciproc, dacă $m(\sphericalangle CQN) = 30^\circ$, atunci $CQ = 2 \cdot CN = \sqrt{2} \cdot OC$, deci

$$m(\sphericalangle OCQ) = 45^\circ. \quad 1p$$

3. Fie $ABCD A'B'C'D'$ un cub și punctele M – mijlocul lui $[A'B']$, N – mijlocul lui $[A'D']$, Q – mijlocul lui $[DC]$, Notăm $\alpha = (MNQ)$.

a) Dacă dreapta $D'C'$ intersectează planul α în punctul T , demonstrați că $[A'T] \equiv [MD']$.

b) Fie $\{P\} = DD' \cap \alpha$ și $\{S\} = BB' \cap \alpha$. Demonstrați că $PQSM$ este dreptunghi.

Raluca Ciurcea, Craiova, GMB, nr.3 /2024

Soluție:

a) dacă arată că $\triangle TD'N \equiv \triangle MA'N$ 1p

dacă finalizează $A'T = MD'$ 1p

b) dacă arată că $PQ \parallel (ABB')$ 2p

dacă arată că $MSQP$ paralelogram 2p

dacă finalizează $PQSM$ dreptunghi 1p

4. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a, b, c > 0$. Arătați că $\frac{a}{2a+b} + \frac{b}{2b+c} + \frac{c}{2c+a} \leq 1$.

Răzvan Irina, elev, Arad

Soluție:

Inegalitatea din enunț este echivalentă cu:

$$\frac{2a+b-b}{2a+b} + \frac{2b+c-c}{2b+c} + \frac{2c+a-a}{2c+a} \leq 2 \Leftrightarrow \quad 2p$$

$$1 - \frac{b}{2a+b} + 1 - \frac{c}{2b+c} + 1 - \frac{a}{2c+a} \leq 2 \Leftrightarrow \quad 1p$$

$$\frac{b}{2a+b} + \frac{c}{2b+c} + \frac{a}{2c+a} \geq 1 \quad 1p$$

Într-adevăr

$$\frac{a}{2c+a} + \frac{b}{2a+b} + \frac{c}{2b+c} = \quad 1p$$

$$= \frac{a^2}{2ac+a^2} + \frac{b^2}{2ab+b^2} + \frac{c^2}{2bc+c^2} \geq \quad (\text{inegalitatea T. A}) \quad 1p$$

$$\geq \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2} = 1 \quad \text{Adevărat} \quad 1p$$