

Concursul regional de matematică „Ioan Aron”
clasa a V-a
etapa regională - 10 mai 2025
Barem de notare

Notă: Se punctează orice altă soluție corectă, chiar dacă nu este precizată în barem

1. a) Să se afle restul împărțirii numărului $a = 1 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2024$ la 2025.

Soluție:

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2024 = (9 \cdot 225) \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 8 \cdot 10 \cdot \dots \cdot 224 \cdot 226 \cdot \dots \cdot 2024 \quad 1p$$

$$\text{Deci, } 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2024 \text{ se împarte exact la } 2025 = 9 \cdot 225 \quad 1p$$

$$\text{Găsește restul egal cu 1} \quad 1p$$

- b) Să se arate că numărul 2025^{1001} se poate scrie atât ca sumă a două pătrate perfecte nenule, cât și ca sumă a trei pătrate perfecte nenule.

Soluție:

$$2025^{1001} = 2025 \cdot 2025^{1000} = 9^2 \cdot 5^2 \cdot (2025^{500})^2 = 9^2(4^2 + 3^2) \cdot (2025^{500})^2 \quad 1p$$

$$2025^{1001} = 9^2 \cdot 4^2 \cdot (2025^{500})^2 + 9^2 \cdot 3^2 \cdot (2025^{500})^2 = (9 \cdot 4 \cdot 2025^{500})^2 + (9 \cdot 3 \cdot 2025^{500})^2 \quad 1p$$

$$2025^{1001} = 2025 \cdot 2025^{1000} = 9^2 \cdot 5^2 \cdot (2025^{500})^2 = (8^2 + 4^2 + 1^2) \cdot 5^2 \cdot (2025^{500})^2 \quad 1p$$

$$\begin{aligned} 2025^{1001} &= 8^2 \cdot 5^2 \cdot (2025^{500})^2 + 4^2 \cdot 5^2 \cdot (2025^{500})^2 + 1^2 \cdot 5^2 \cdot (2025^{500})^2 = \\ &= (8 \cdot 5 \cdot 2025^{500})^2 + (4 \cdot 5 \cdot 2025^{500})^2 + (1 \cdot 5 \cdot 2025^{500})^2 \end{aligned} \quad 1p$$

2. a) Se pot scoate dintr-o carieră de piatră 50 de blocuri de piatră având greutatea de 370 kg, 372 kg, 374 kg, ... , 468 kg cu șapte camioane cu capacitatea de trei tone fiecare, într-un singur transport?

Justificați răspunsul.

Revista Kvant

Soluție:

Dacă s-ar putea, atunci într-un camion trebuie să fie puse 8 blocuri (PC). Dar, chiar și cele mai ușoare 8 blocuri cântăresc:

$$\begin{aligned} 370 + 372 + 374 + 376 + 378 + 380 + 382 + 384 &= 4 \cdot 754 = 3016 \text{ kg} \\ &> 3000 \text{ kg} = 3 \text{ tone} \end{aligned}$$

Răspuns: NU este posibil 3p

b) Arătați că un număr natural de 2025 de cifre, dintre care una este cifra 2, iar jumătate din numărul cifrelor care au rămas sunt cifra 3 și cealaltă jumătate sunt cifra 4, nu poate fi pătrat perfect.

Soluție

Suma cifrelor numărului considerat este $1012 \cdot 3 + 1012 \cdot 4 + 2 = 7086$ 1p

Rezultă că numărul este divizibil cu 3 1p

Dacă ar fi pătrat perfect, ar fi divizibil și cu 9 1p

Dar 7086 nu se divide cu 9, deci numărul nu poate fi pătrat perfect 1p

3. Aflați perechile de numere $(p, \overline{abcd})$, p număr prim, pentru care

$$(a+b+c+d)^4 = p^4 \cdot \overline{abcd}.$$

Cristina Vijdeliuc, Mihai Vijdeliuc,
E:16928, G.M.B, nr 6-7-8/2024

Soluție:

Egalitatea din enunț se scrie

$$\overline{abcd} = \left(\frac{a+b+c+d}{p} \right)^4 \in \mathbb{N}$$

Atunci, $\frac{a+b+c+d}{p} \in \{6,7,8,9\}$. 2p

Dacă $\frac{a+b+c+d}{p} = 6$ atunci $\overline{abcd} = 6^4 = 1296$, de unde

$$a+b+c+d = 1+2+9+6 = 18 \text{ și } p = 3 \text{ număr prim} \quad 1p$$

Dacă $\frac{a+b+c+d}{p} = 7$ atunci $\overline{abcd} = 7^4 = 2401$, de unde

$$a+b+c+d = 2+4+0+1 = 7 \text{ și } p = 1 \text{ care nu este număr prim, contradicție} \quad 1p$$

Dacă $\frac{a+b+c+d}{p} = 8$ atunci $\overline{abcd} = 8^4 = 4096$, de unde

$$a+b+c+d = 4+0+9+6 = 19 \text{ și } p \notin \mathbb{N}, \text{ contradicție} \quad 1p$$

Dacă $\frac{a+b+c+d}{p} = 9$ atunci $\overline{abcd} = 9^4 = 6561$, de unde

$$a+b+c+d = 6+5+6+1 = 18 \text{ și } p=2 \text{ număr prim} \quad 1p$$

Soluțiile sunt:

$$(p, \overline{abcd}) \in \{(3, 1296), (2, 6561)\} \quad 1p$$

4. Numim "aronel" un număr natural care se poate scrie sub următoarea formă:
 $\overline{abcd} - \overline{dcba} - 153$, unde cifrele a, b, c, d îndeplinesc relația $\overline{ab} + \overline{cd} = \overline{da} + \overline{bc}$.
 Determinați cel mai mic și cel mai mare număr "aronel" de 4 cifre.

Unguroiu Răzvan-Marius, elev, Arad

Soluție:

$$\begin{aligned}\overline{ab} + \overline{cd} &= \overline{da} + \overline{bc} \\ 10a + b + 10c + d &= 10d + a + 10b + c \\ 9a + 9c &= 9d + 9b \quad |:9 \\ a + c &= d + b \\ a - d &= b - c \quad (1)\end{aligned}$$

2p

Din (1) obținem:

$$\begin{aligned}\overline{abcd} - \overline{dcba} - 153 &= 1000a + 100b + 10c + d - 1000d - 100c - 10b - a - 153 = \\ &= 999a + 90b - 90c - 999d - 153 = 999(a - d) + 90(b - c) - 153 = 999(a - d) + \\ &+ 90(a - d) - 153 = 1089(a - d) - 153\end{aligned}$$

2p

Deoarece a și d sunt cifre iar numărul "aronel" este natural $\Rightarrow 0 \leq a - d \leq 9$

Dacă $a - d = 0 \Rightarrow 1089(a - d) - 153 = 1089 \cdot 0 - 153 = 0 - 153 \Rightarrow FALS$

Dacă $a - d = 1 \Rightarrow 1089(a - d) - 153 = 1089 \cdot 1 - 153 = 1089 - 153 = 936 < 1000 \Rightarrow FALS$

Dacă $a - d = 9 \Rightarrow a = 9, d = 0$ contradicție deoarece numărul $\overline{da}$ impune $d \neq 0$

2p

Deci $2 \leq a - d \leq 8 \Rightarrow$ minimul se obține pentru $a - d = 2$, iar maximul pentru $a - d = 8$.

Minimul: $1089 \cdot 2 - 153 = 2025$

Maximul: $1089 \cdot 8 - 153 = 8559$

Deci, cel mai mic număr "aronel" de 4 cifre este 2025 iar cel mai mare este 8559.

1p