Concursul interjudețean de matematică „Ioan Aron"

clasa a VI-a - etapa interjudețeană

Arad - 9 mai 2026

BAREM

Notă: Fiecare subiect se notează cu 7 puncte
Pentru fiecare soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător

1. Arătați că suma $S=\frac{342}{3}+\frac{1542}{15}+\frac{3542}{35}+\ldots+\frac{39942}{399}$ este număr natural.

Gheorghe Iacob, Pașcani

Soluție:

$$S=\frac{300+42}{3}+\frac{1500+42}{15}+\frac{3500+42}{35}+\cdots+\frac{39900+42}{399}= \qquad 2\text{ p}$$

$$=\underbrace{100+100+\cdots+100}_{de\ 10\ ori}+21\cdot\left(\frac{2}{1\cdot3}+\frac{2}{3\cdot5}+\frac{2}{5\cdot7}+\cdots+\frac{2}{19\cdot21}\right)= \qquad 2\text{ p}$$

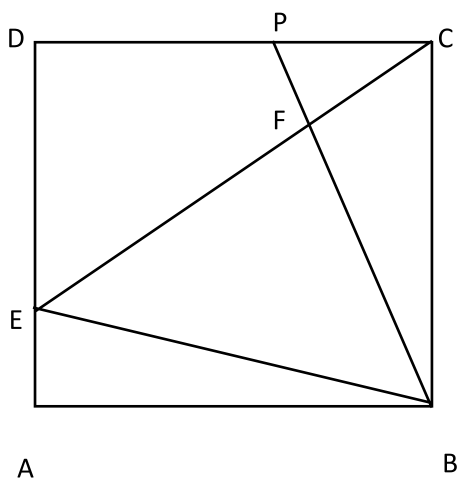
$$=1000+21\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)=1000+21\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{21}\right)= \qquad 2\text{ p}$$

$$=1000+21\cdot\frac{20}{21}=1020\in\mathbb{N}. \qquad 1\text{p}$$

2. Dacă $ABCD$ este pătrat cu $E\in(AD)$, $P\in(CD)$, $EC\cap BP=\{F\}$, astfel încât $PD=4$ cm, $A_{\Delta BEF}=6078\ \text{cm}^2$ și $A_{\Delta PFC}=2026\ \text{cm}^2$, atunci aflați lungimea laturii pătratului $ABCD$.
(formula de calcul pentru aria triunghiului este $A_{\Delta}=\frac{l\cdot h}{2}$, unde l este lungimea laturii triunghiului, iar h este lungimea înălțimii corespunzătoare laturii)

Neculai Stanciu, Buzău (adaptare)

Soluție:



Notăm cu l latura pătratului și $\mathcal{A}_{\Delta BFC} = k$.

Avem că $\mathcal{A}_{\Delta BEC} = \mathcal{A}_{\Delta BEF} + \mathcal{A}_{\Delta BFC} = 6078 + k$ și $\mathcal{A}_{\Delta BEC} = \frac{BC\cdot d(E,BC)}{2} = \frac{l^2}{2}$, deci $\frac{l^2}{2} = 6078 + k$. 2p

$\mathcal{A}_{\Delta BPC} = \mathcal{A}_{\Delta PFC} + \mathcal{A}_{\Delta BFC} = 2026 + k$ și $\mathcal{A}_{\Delta BPC} = \frac{BC\cdot CP}{2} = \frac{l(l-4)}{2}$, deci $\frac{l(l-4)}{2} = 2026 + k$. 2p

Din relațiile de mai sus avem $\frac{l^2}{2} - \frac{l(l-4)}{2} = (6078 + k) - (2026 + k)$ echivalent cu $2l = 4052$, de unde $l = 2026\ cm$. 3p

3. Fie numerele întregi a, b, c și numărul

$$E = |a-b|\cdot|b-c| + |b-c|\cdot|c-a| + |c-a|\cdot|a-b| + \left|(a-b)(b-c) + (b-c)(c-a) + (c-a)(a-b)\right|$$

Arătați că numărul 2·E este pătrat perfect.

Dan Nedeianu, G.M. nr. 3/2025

Soluție:

Notăm $a-b=x$, $b-c=y$, $c-a=z$, iar $x+y+z=0$. 1 p

Expresia devine: $E = |xy| + |yz| + |zx| + |xy+yz+zx|$

Deoarece $x+y+z=0$ rezultă că două dintre numerele x, y, z au același semn, iar cel de al treilea are semn contrar. 1 p

Putem presupune că $x \geq 0$, $y \geq 0$ și $z \leq 0$, de unde $c \leq b \leq a$ 1 p

Atunci $|xy| = xy$, $|yz| = -yz$ și $|zx| = -zx$ 1 p

Mai mult, $x \leq -z$ și $y \leq -z$, astfel ca $xy + yz + zx = xy - z^2 \leq 0$

De unde rezultă că $|xy+yz+zx| = -xy - yz - zx$ 1 p

Prin înlocuire se obține

$$E = (xy - yz - zx) + (-xy - yz - zx) = -2(yz + zx) = -2z(y + x) = 2z^2$$ 1 p

Iar $2E = 4z^2 = (2z)^2$ care este pătrat perfect 1 p

4. Fiecare dintre numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ este egal cu plus sau cu minus unu.

   Se știe că $x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + \ldots + x_{n-1} \cdot x_n + x_n \cdot x_1 = 0$

   Să se demonstreze că n se divide la 4 .

A. M. Leontovici, Revista KVANT

Soluție:

Întrucât în suma $x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + \cdots + x_{n-1} \cdot x_n + x_n \cdot x_1$ sunt exact n termeni, n este par (numărul termenilor egali cu $+1$ trebuie să fie egal cu numărul termenilor egali cu -1). 2 p

Rămâne să demonstrăm că numărul de (-1) este par.

Pentru aceasta, înmulțim toți acești termeni

$(x_1 \cdot x_2) \cdot (x_2 \cdot x_3) \cdot (x_3 \cdot x_4) \cdot \ldots \cdot (x_n \cdot x_1) = {x_1}^2 \cdot {x_2}^2 \cdot \ldots \cdot {x_n}^2 = 1$ 2 p

Numărul termenilor (- 1) este $\frac{n}{2}$, deci $(-1)^{\frac{n}{2}} = 1$, ceea ce înseamnă că $\frac{n}{2}$ este par,

Deci n este divide cu 4. 3 p