

Concursul interjudețean de matematică „Ioan Aron”
clasa a VI-a - etapa județeană
18 aprilie 2026
BAREM

Notă: Fiecare subiect se notează cu 7 puncte

Pentru fiecare soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător

1.

a) Aflați numerele naturale a, b, c știind că $4^a \cdot 5^b \cdot 6^c = 8^8 \cdot 9^9 \cdot 10^{10}$.

Olimpiadă Cipru

b) Știind că numerele raționale pozitive nenule x, y, z sunt direct proporționale cu numerele 5, 1, respectiv 2, comparați numerele:

$$\frac{z}{x+y}, \frac{z^2}{x^2+y^2} \text{ și } \frac{z^3}{x^3+y^3}.$$

Soluție:

a) $2^{2a} \cdot 5^b \cdot 2^c \cdot 3^c = 2^{24} \cdot 3^{19} \cdot 2^{10} \cdot 5^{10}$ (1p)

deci, $2^{2a+c} \cdot 3^c \cdot 5^b = 2^{34} \cdot 3^{19} \cdot 5^{10}$ (1p)

din unicitatea descompunerii unui număr în factori primi, deducem că:

$$2a + c = 34, c = 18, b = 10. \quad (0,5p)$$

$$\text{Deci, } a = 8, b = 10, c = 18 \quad (0,5p)$$

b) Avem $\frac{x}{5} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2} = k$ de unde $x = 5k, y = k, z = 2k$ (1p)

Atunci $\frac{z}{x+y} = \frac{1}{3}$; $\frac{z^2}{x^2+y^2} = \frac{2}{13}$ și $\frac{z^3}{x^3+y^3} = \frac{4}{63}$. (2p)

De unde $\frac{z}{x+y} > \frac{z^2}{x^2+y^2} > \frac{z^3}{x^3+y^3}$ (1p)

2. Fie ABC un triunghi obtuzunghic isoscel cu baza BC . Fie (BE bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABC$, $E \in AC$, (EF bisectoarea unghiului $\sphericalangle BEC$, $F \in BC$, (FG bisectoarea unghiului $\sphericalangle EFC$, $G \in AC$, (GH bisectoarea unghiului $\sphericalangle EGF$, $H \in AB$.

Știind că dreptele GH și BC sunt paralele, demonstrați că dreptele GF și AB sunt paralele și determinați măsurile unghiurilor triunghiului ABC .

G. M. nr. 1/2025, E:17097, Claudiu Militaru

Soluție:

$GH \parallel BC$, deci $\sphericalangle CFG \equiv \sphericalangle FGH$ (alt int) și $\sphericalangle AGH \equiv \sphericalangle C$ (corespondente) (1p)

Cum $\sphericalangle AGH \equiv \sphericalangle FGH$ (GH bisectoarea $\sphericalangle EGF$) și $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB$,

Obținem că $\sphericalangle CFG \equiv \sphericalangle ABC$, de unde rezultă că $GF \parallel AB$. (1p)

Fie $x = m(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle ACB) = m(\sphericalangle AGH) = m(\sphericalangle FGH) = m(\sphericalangle CFG) = m(\sphericalangle EFG)$ (1p)

În triunghiul EGF avem $m(\sphericalangle FEG) = 180^\circ - 3x$ (1p)

Deci $m(\sphericalangle BEC) = 2 m(\sphericalangle FEG) = 360^\circ - 6x$. (1p)

În triunghiul BEC avem: $360^\circ - 6x + x + \frac{x}{2} = 180^\circ$ (1p)

De aici $x = 40^\circ$

Deci $m(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle ACB) = 40^\circ$ și $m(\sphericalangle BAC) = 100^\circ$. (1p)

3. Determinați $n \in \mathbb{N}$ astfel încât numărul $2^n + 1$ să aibă exact trei divizori.

Mihai Opincariu, Brad

Soluție:

Se observă că $n \geq 3$.

Dacă $2^n + 1$ are exact trei divizori atunci $2^n + 1 = p^2$, p număr prim,

divizorii fiind $1, p, p^2$. (2p)

Dacă $p = 3k + 1 \Rightarrow p^2 = (3k + 1)^2 = M_3 + 1$ deci $2^n = M_3$ fals (2p)

Dacă $p = 3k + 2 \Rightarrow p^2 = (3k + 2)^2 = M_3 + 1$ deci $2^n = M_3$ fals (2p)

Cum p este prim $\Rightarrow p = 3$, deci $n = 3$. (1p)

4. Fie triunghiul isoscel ABC de bază $[BC]$, $M \in (AC)$, $N \in (AM)$, astfel încât $\sphericalangle ABN \equiv \sphericalangle CBM$.

Arătați că $[BM] \equiv [MN]$ dacă și numai dacă $m(\sphericalangle NBC) = 60^\circ$.

Ion Neață, Slatina, Olt

Soluție:

Notăm $m(\sphericalangle ABN) = m(\sphericalangle CBM) = u$, $m(\sphericalangle MBN) = x$ și $m(\sphericalangle BNM) = y$

$m(\sphericalangle BMC) = x + y$ (unghi exterior triunghiului BMN). (1p)

$m(\sphericalangle ACB) = 180^\circ - u - (x + y)$; $m(\sphericalangle ABC) = 2u + x$; (1p)

Cum triunghiul ABC este isoscel $2u + x = 180^\circ - u - (x + y)$ (1p)

Deoarece $m(\sphericalangle NBC) = x + u$, egalitatea de mai sus devine

$3m(\sphericalangle NBC) + y - x = 180^\circ$ (*) (2p)

Demonstrăm că:

Dacă $[BM] \equiv [MN]$ atunci $m(\sphericalangle NBC) = 60^\circ$.

$[BM] \equiv [MN] \Rightarrow x = y$

Din relația (*) obținem că $m(\sphericalangle NBC) = 60^\circ$. (1p)

Reciproc, Dacă $m(\sphericalangle NBC) = 60^\circ$ atunci $[BM] \equiv [MN]$.

$m(\sphericalangle NBC) = 60^\circ$ și din (*) $\Rightarrow y = x$

\Rightarrow triunghiul MNB isoscel, deci $[BM] \equiv [MN]$. (1p)