Concursul interjudețean de matematică „Ioan Aron”

clasa a VII-a - etapa interjudețeană

Arad - 9 mai 2026

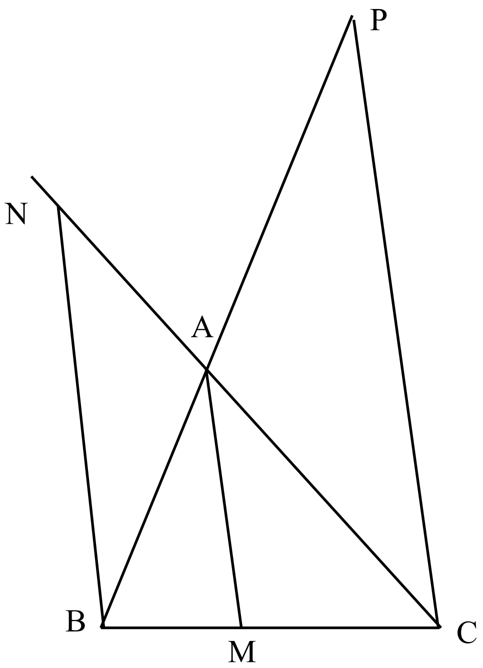
BAREM

Notă: Fiecare subiect se notează cu 7 puncte
Pentru fiecare soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător

1. Fie ABC un triunghi și $M \in (BC)$ un punct mobil. Paralelele prin B și C la AM intersectează dreptele AC și AB în N, respectiv P. Aflați valoarea minimă a raportului $\frac{BN+CP}{AM}$.

Ion Pîrșe

Soluție:



Din inegalitatea mediilor și T.F.A., $\frac{BN+CP}{AM} = \frac{BN}{AM} + \frac{CP}{AM} = \frac{BC}{MC} + \frac{BC}{MB} \geq 2\sqrt{\frac{BC^2}{BM \cdot MC}} = \frac{2BC}{\sqrt{BM \cdot MC}} \geq \frac{2BC}{(BM+MC):2} = \frac{2BC}{BC:2} = 4$, 5p

valoarea care se atinge atunci când M este mijlocul laturii $[BC]$, deci valoarea minimă este 4.

2p

2.

a) Arătați că dacă $a, b > 0$, atunci $\frac{1}{2}+\frac{1}{a+b}\le\frac{1}{2}\sqrt{\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)}$.

b) Dacă $a, b, c > 0$, atunci $\left(1+\frac{2}{a+b}\right)\left(1+\frac{2}{b+c}\right)\left(1+\frac{2}{a+c}\right)\le\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)$.

Mihai Vijdeluc, Baia Mare

Soluție:

a) Inegalitatea este echivalentă cu

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{(a+b)^2}\le\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) <=> \frac{1}{4}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{(a+b)^2}\le\frac{1}{4}+\frac{1}{4a}+\frac{1}{4b}+\frac{1}{4ab} \quad <=>$$

2p

$$\frac{a+b+1}{(a+b)^2}\le\frac{a+b+1}{4ab} \quad <=> \quad (a+b)^2\ge 4ab \quad <=> \quad (a-b)^2\ge 0$$ Adevărat 2p

b) Relația de la a) este echivalentă cu

$$1+\frac{2}{a+b}\le\sqrt{(1+\tfrac{1}{a})(1+\tfrac{1}{b})}$$ 1p

Vom scrie și analoagele:

$$1+\frac{2}{b+c}\le\sqrt{(1+\tfrac{1}{b})(1+\tfrac{1}{c})}$$ 0,5p

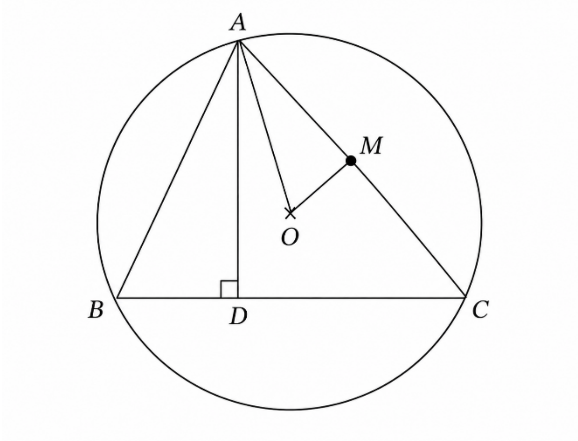
$$1+\frac{2}{a+c}\le\sqrt{(1+\tfrac{1}{a})(1+\tfrac{1}{c})}$$ 0,5p

Înmulțind ultimele 3 relații obținem relația cerută. 1p

3. Fie triunghiul ABC, O centrul cercului circumscris triunghiului, M mijlocul laturii AC și $AD \perp BC$, $D \in BC$. Demonstrați că $OM \geq \frac{BD}{2}$.

G.M. nr. 3/2025, E:17161, Cătălin Cristea

Soluție:



Cum O este centrul cercului circumscris triunghiului și M este mijlocul laturii AC rezultă că OM este mediatoarea lui AC, deci $OM \perp AC$. 1p

Avem $m(\sphericalangle AMO) = m(\sphericalangle ADB) = 90°$ (1) 1p

Apoi $m(\sphericalangle AOM) = \frac{m(\sphericalangle AOC)}{2} = m(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle ABD)$ (2) 1p

Din (1) și (2) se obține că $\triangle AMO \sim \triangle ADB$, de unde $\frac{AM}{AD} = \frac{OM}{BD}$. Deci,

$OM = \frac{AM \cdot BD}{AD} = \frac{BD}{2} \cdot \frac{AC}{AD} \geq \frac{BD}{2}$ (deoarece $AC \geq AD$). 3p

Se obține egalitate pentru $C = D$, adică $m(\sphericalangle ACB) = 90°$ 1p

4. Pentru un număr natural n, notăm cu $s(n)$ suma cifrelor sale. Spunem că un număr natural n este bun dacă $s(n)+s(n+1)$ este pătrat perfect. Arătați că există o infinitate de perechi de numere naturale consecutive care sunt bune. Există trei numere consecutive care sunt bune?

Andrei Eckstein

Soluție:

De exemplu, $n = 3 \cdot 10^k + 99$ (cu $k \geq 3$) este bun deoarece 2p

$s(n) + s(n+1) = (3+9+9) + (3+1) = 25 = 5^2$, 1p

iar $n+1$ este și el bun deoarece

$s(n+1) + s(n+2) = (3+1) + (3+1+1) = 9 = 3^2$. 1p

Nu putem avea trei numere consecutive bune deoarece printre trei numere consecutive există unul care dă rest 2 la împărțirea cu 3, iar $s(3k+2) + s(3k+3)$ dă același rest la împărțirea cu 3 ca și $(3k+2) + (3k+3)$, anume 2. 2p

Ori nu există pătrate perfecte care să dea restul 2 la împărțirea cu 3, deci niciun număr de forma $3k+2$ nu este bun. 1p