Concursul interjudețean de matematică „Ioan Aron”

clasa a V-a - etapa interjudețeană

Arad - 9 mai 2026

BAREM

Notă: Fiecare subiect se notează cu 7 puncte
Pentru fiecare soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător

1. a) Aflați media aritmetică a tuturor palindromurilor de trei cifre. (Un palindrom de trei cifre este un număr de forma $\overline{aba}$).

AIME, SUA

b) Arătați că există o infinitate de numere naturale n, astfel încât suma cifrelor lui n și ale lui $n+1$ să fie divizibilă cu 5.

Ion Neață, Slatina, Olt

Soluție:

a) Palindroamele sunt de forma $\overline{aba} = 101 \cdot A + 10 \cdot B$, unde $1 \leq a \leq 9$ și $0 \leq b \leq 9$ sunt cifre. 2p

Suma tuturor palindroamelor este

$(101 \cdot 10 + 202 \cdot 10 + \cdots + 909 \cdot 10) + 45 \cdot 90 = 101 \cdot 10 \cdot 45 + 45 \cdot 90$ 1p

Deci, media aritmetică este $\frac{101 \cdot 10 \cdot 45 + 45 \cdot 90}{90} = 505 + 45 = 550.$ 1p

b) Considerăm numerele $n = 4\underbrace{999 \dots 9}_{(10k+4)\ cifre}$, $k \in \mathbb{N}$, pentru care avem $n + 1 = 5\underbrace{000 \dots 00}_{(10k+4)\ cifre}$. 2p

Suma cifrelor lui n este:

$S(n) = 4 + 9 \cdot (10k + 4) = 90k + 40 = 10 \cdot (9k + 4) = M_5$ și $S(n + 1) = 5.$ 1p

2. Arătați că numărul $a = 1 + 2025 \cdot \left(2026^0 + 2026^1 + 2026^2 + \dots + 2026^{2025}\right)$ este pătrat perfect.

Soluție:

Considerăm numărul $b = 2026^0 + 2026^1 + 2026^2 + \cdots + 2026^{2025}$.

Atunci $2026 \cdot b = 2026^1 + 2026^2 + 2026^3 + \cdots + 2026^{2026}$. 2p

Se obține $2026 \cdot b - b = 2026^{2026} - 1$ adică $2025 \cdot b = 2026^{2026} - 1$. 2p

Așadar, $a = 1 + 2025 \cdot b = 1 + 2026^{2026} - 1 = 2026^{2026} = (2026^{1013})^2$, pătrat perfect. 3p

3. Arătați că numărul 5^{30} are 21 de cifre și prima sa cifră este 9, fără a-l calcula efectiv.

Mihai Opincariu, Brad

Soluție:

Vom arăta că $9 \cdot 10^{20} < 5^{30} < 10^{21}$. 3p

Relația $9 \cdot 10^{20} < 5^{30}$ este echivalentă cu $9 \cdot 2^{20} < 5^{10}$ sau $3 \cdot 2^{10} < 5^5$, care este adevărată deoarece $3072 < 3125$. 2p

Relația $5^{30} < 10^{21}$ este echivalentă cu $5^9 < 2^{21}$ sau $5^3 < 2^7$, care este adevărată deoarece $125 < 128$. 2p

4. Ona, Dona, mama lor, bunica și străbunica au suma vârstelor un pătrat perfect $\overline{abc}$, cu a, b, c cifre distincte. Ce vârstă are fiecare, dacă:

i) Fiecare vârstă este un număr divizibil cu 4, iar $\overline{abc} < 200$.

ii) Peste un an, Ona și Dona au suma vârstelor egală cu baza pătratului perfect.

iii) Atunci când Dona avea 4 ani, mama ei avea jumătate din vârsta actuală a bunicii, iar media aritmetică a vârstelor Onei, Donei, mamei și bunicii era jumătate din vârsta pe care o va avea străbunica peste 4 ani.

Daniela-Andrada Bardac-Vlada, SUA, GM nr. 2/2025

Soluție:

Vom nota cu v_1, v_2, v_3, v_4 și v_5 vârstele membrilor familiei în ordine cronologică. Cum vârstele sunt divizibile cu 4, rezultă că $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = \overline{abc} \vdots 4$. 1p

Cum $\overline{abc} < 200, b \neq c$ și $\overline{abc}$ este pătrat perfect, se obține că $\overline{abc} = 196 = 14^2$. 2p

De asemenea, $v_1 + 1 + v_2 + 1 = 14 \iff v_1 + v_2 = 12$. Ținând cont că vârstele sunt divizibile cu 4, se obține că $v_1 = 4$ și $v_2 = 8$. 1p

Din iii) deducem că $v_4 = 2(v_3 - 4)$ și $(v_2 + v_3 + v_4 + v_5 - 16): 4 = (v_5 + 4): 2$. 1p

Ultima inegalitate devine $196 - 4 - 16 = 2v_5 + 8$, de unde $v_5 = 84$. Folosind $v_4 = 2(v_3 - 4)$, se obține $8 + v_3 + 2v_3 - 8 + 84 - 16 = 2 \cdot 84 + 8$ și prin urmare $v_3 = 36$, iar $v_4 = 64$.

2p