Concursul interjudețean de matematică „Ioan Aron”

clasa a VIII-a - etapa interjudețeană

Arad - 9 mai 2026

BAREM

Notă: Fiecare subiect se notează cu 7 puncte
Pentru fiecare soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător

1. Fie a,b,c >0 cu abc = 1. Demonstrați că $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\leq\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$.

Soluție:

0≤ $(a-b)^2$ ⇔ 0 ≤ a^2-2ab+ b^2 |+4ab ⇒ 4ab ≤ $(a+b)^2$ ⇔ $\frac{4}{a+b}\leq\frac{a+b}{ab}$ ⇒ $\frac{4}{a+b}\leq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 2p
La fel pentru : $\frac{4}{c+b}\leq\frac{1}{c}+\frac{1}{b}$ și $\frac{4}{a+c}\leq\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$ 1p
Prin adunarea lor obținem: $4\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\leq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

⇒ $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{abc}{a}+\frac{abc}{b}+\frac{abc}{c}\right)=\frac{1}{2}(bc+ca+ab)\leq\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$ 2p
0≤ $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$
0≤ $a^2+b^2+a^2+c^2+b^2+c^2$ -2ab-2bc-2ac ⇒ ab+bc+ac ≤ $a^2+b^2+c^2$ adevărat.................................1p
Egalitatea are loc pentru a = b = c = 1 ....1p

2. Fie numerele reale nenule x,y,z astfel încât x+y+z=24 și xy+ yz+ xy =192. Calculați : $\frac{x^4}{y}+\frac{y^4}{z}+\frac{z^4}{x}$.

Constantin Nicolau, Curtea de Argeș G.M.nr. 5

Soluție :

x+y+z=24 $|^2$ ⇒ $x^2+y^2+z^2$+ 2xy+2yz+2xz = 576 ....1p
xy+yz+xz= 192 |·2 ⇒ 2xy+2yz+2xz= 384
$x^2+y^2+z^2$= 576-384 , $x^2+y^2+z^2$=192 | ·2 ⇒ $2x^2+2y^2+2z^2$=384 ⇒ $2x^2+2y^2+2z^2$-2xy-2yz-2zy= 0.......3p
$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$= 0 ⇒ x=y=z=8 ....2p
$\frac{x^4}{y}+\frac{y^4}{z}+\frac{z^4}{x}$ = 8· 8^3 = 1536 ....1p

3. Un cub cu muchia de n cm, $n\in N^*$, se împarte în n^3 cuburi, fiecare având muchia de 1cm. Fețele cubului inițial se colorează în roșu.
   a. Câte cuburi nu au nicio față colorată?
   b. Câte cuburi au o față colorată?
   c. Câte cuburi au cel puțin două fețe colorate?
   d. Dacă desenăm cu alb diagonalele fețelor cubului inițial, câte cuburi au cel pițin un segment alb pe fețe?

Soluție:

a. Cuburile necolorate formează în interiorul cubului inițial un cub de latură n-2.
   Deci sunt $(n-2)^3$ cubulețe care nu au nicio față colorată. 1p
b. Cuburile care nu au muchii situate pe muchiile cubului mare, dar au o singură față pe o față a acestuia, au o singură față colorată. Pe fiecare față, acestea formează împreună un pătrat de latură n-2, deci sunt $(n-2)^2$ pătrățele pe fiecare față a cubului. Cu o față colorată sunt $6(n-2)^2$ cubulețe...2p
c. De la a. și b. Obținem că $n^3-6(n-2)^2-(n-2)^3$ este numărul cuburilor cu cel puțin două fețe colorate, din care 8 au trei fețe colorate...2p
d. Dacă n este impar, pe o față, de-a lungul unei diagonale, sunt n pătrate, deci 2n-1cuburi străbătute de segmente albe, cel din ,,centru” s-a numărat de două ori. Cubulețele care conțin vârfurile cubului mare apar pe trei fețe, deci se numără de trei ori. În total sunt $6(2n-1)-2\cdot 8= 12n-22$ 1p
   Dacă n este par, atunci pe fiecare față sunt 2n cuburi străbătute de segmente albe, deci în total sunt $6\cdot 2n-2\cdot 8= 12n-16$ 1p

4. Fie ABCDA′B′C′D′ un cub și P un punct variabil pe muchia [AB]. Planul perpendicular în P pe AB intersectează pe dreapta AC′ în punctul Q. Notăm cu M și N mijloacele segmentelor A′P și respectiv BQ.
   a. Arătați că dreptele MN și BC′ sunt perpendiculare dacă și numai dacă P este mijlocul lui AB.
   b. Determinați valoarea minimă a unghiului MN și BC′.

Petre Simion

Soluție :

a. Fie O centrul pătratului BCC′B′. Dacă P este mijlocul segmentului AB, atunci Q este mijlocul segmentului AC′, deci PBOQ este paralelogram. Înseamnă că punctele P,N și O sunt coliniare, deci MN este linie mijlocie în triunghiul A′PO, adică MN ‖ A′O. Cum triunghiul A′BC′ este echilateral, obținem că $A'O\perp BC'$, deci $MN\perp BC'$. 2p
   Reciproc, dacă $MN \perp BC'$, cum $BC'\perp A'O \Rightarrow A'O \| MN$ sau $BC\perp(A'OP)$. Dar BC′ nu este perpendiculară pe OP, deci rămâne cazul A′O ‖ MN. De aici ⇒ N este mijlocul segmentului OP. Deducem că PBOQ este paralelogram, adică OQ este linie mijlocie în triunghiul ABC′. Cum Q este mijocul lui AC′ ⇒ P este mijocul lui AB. 2p
b. Fie U punctul de intersecție al paralelei duse prin Q la AB cu dreapta BC′. Cum QPBU este paralelogram ⇒ PN=NU, deci MN este linie mijlocie în triunghiul A′PU.
   Deci, unghiul detrminat de MN cu BC′ este egal cu unghiul format de A′U cu BC′. 2p

Triunghul A′BC′ este echilateral $\Rightarrow$ unghiul dintre BC și A′U este cel puțin egal cu 60^0, cu egalitate pentru A=P sau P=B.

1p